

## Yapıların Kirişlerdeki Çatlama Gözönüne Alınarak Rijit Diyafram Modeli İle Üç Boyutlu Analizi

**C. Dünder**

*Çukurova Üniversitesi, İnşaat Mühendisliği Bölümü  
Adana, Türkiye*

**İ. F. Kara**

*Çukurova Üniversitesi, İnşaat Mühendisliği Bölümü  
Adana, Türkiye*

**A. K. Tanrikulu**

*Çukurova Üniversitesi, İnşaat Mühendisliği Bölümü  
Adana, Türkiye*

**ÖZET:** Bu çalışmada kirişlerdeki çatlamlar göz önünde bulundurularak, taşıyıcı sistemi çerçevelerden oluşan betonarme yapıların rijit diyafram modeli ile üç boyutlu analizi için bir bilgisayar programı geliştirilmiş olup, çatlamanın sadece kiriş elemanlarda olduğu, kolonlarda ise lineer elastik modelin geçerli olduğu kabul edilmiştir. Elemanların çatlama halinde, efektif atalet momentlerinin hesabında ACI ve CEB modelleri kullanılmıştır. Analizde ayrıca kayma deformasyonlarının etkisi de göz önünde bulundurulmuş, efektif kayma modüllerinin hesabında literatürde mevcut olan değişik yöntemler kullanılmıştır. Geliştirilen bu program aracılığı ile yatay ve düşey yükler etkisi altındaki üç katlı bir betonarme çerçeve örneği çözümlenerek düğüm deplasmanlarının ve eleman uç kuvvetlerinin lineer analize göre nasıl bir değişim gösterdiği irdelenmeye çalışılmıştır.

**Anahtar Kelimeler:** Betonarme çerçeveler, rijit diyafram modeli, efektif atalet momenti, efektif kayma modülü, deplasmanlar

**ABSTRACT:** In this study a computer program has been developed using rigid diaphragm models for the three dimensional analysis of reinforced concrete buildings with beams in cracked state. In the frame analysis cracking is considered only for beam elements, therefore, linear elastic stiffness equation is used for the columns. ACI and CEB models are used for the effective moment of inertia of the cracked members. In the analysis, shear deformations which has very important role especially after cracks are taken into account and reduced shear stiffness is considered by using effective shear modulus models available in the literature. Using the developed computer program a parametric study is carried out on a three story three dimensional reinforced concrete building subjected to external loads to observe the variations in deformations and element forces considering beams in uncracked and cracked states.

## Giriş

Betonarme yapıların projelendirilmesinde kesit hesaplarında beton ve çeliğin elastik ötesi davranışının göz önüne alınmasına karşın, yapısal analizde lineer elastik hesap yöntemleri kullanılmaktadır. Ancak betonarme elemanların doğrusal olmayan davranışlarının, özellikle çatlama sonrası eğilme ve kayma rijitliklerinde oluşacak azalmaların göz önüne alınması, hem yapıda oluşacak iç kuvvet dağılımını hem de yerdeğiştirme değerlerini önemli ölçüde etkilemektedir. Rijitlikteki azalmaların çatlama sonrası ilerlemesine bağlı olarak arttığı da düşünülürse, betonarme bir elemanda çatlama sonrası durum büyük bir öneme sahip olmaktadır.

Betonarme taşıyıcı sistemin kendisinden beklenen işlevi yerine getirmesi için göçme durumuna karşı belirli bir güvenliğe sahip olmasının yanında, servis yükleri altında büyük yer değiştirmeler yapmaması hatta bu değerlerin belli sınırların altında kalması gerekmektedir. Özellikle kirişlerde meydana gelen çökmelerin kesin hesabında çatlama sonrası betonarme elemanların eğilme ve kayma rijitliklerindeki değişimler etkili olmaktadır.

Yapıya etkiyen yükler sebebiyle betonarme elemanlarda oluşan çatlama ve çatlama sonrası durum bugüne kadar gerek yapılan deneysel çalışmalarla gerekse de beton ve çelik malzemelerin birlikte davranışlarını hesaba katan modeller kullanılarak incelenmiştir. Tanrıku, Dünder ve Çağatay kirişlerdeki çatlama sonrası durumu göz önünde bulundurarak çerçevelerin iki boyutlu analizi için bir bilgisayar programı geliştirmişlerdir (Tanrıku, 2000). Çalışmalarında çatlama sonrası büyük bir öneme sahip olan kayma deformasyonlarının etkisini de hesaba katıp, efektif kayma modüllerinin hesabında Al-Mahaidi, Cedolin ve Dei Poli ile Yüzügüllü ve Schnobrich'in önermiş oldukları yöntemleri, efektif atalet momentlerinin hesabında ise ACI ve CEB modellerini kullanmışlardır. Geliştirdikleri bilgisayar programı aracılığı ile literatürde mevcut olan deneysel çalışmaları yapılmış örnekleri çözümlemişler ve uyumlu sonuçlar elde etmişlerdir. Chun-Man, Neil C. Mickleborough Fellow ve Feng Ning yatay yükler etkisi altındaki çok katlı betonarme yapılarda çatlama sonrası durumu göz önünde bulunduran iteratif yöntemlere dayalı, yük artım metodu ve efektif rijitlik modeli olmak üzere iki farklı analiz algoritması geliştirmişlerdir (Chan, 2000). Çalışmalarında ayrıca aksel ve yatay yükler etkisi altındaki iki katlı betonarme bir çerçeveyi deneysel olarak teste tabii tutarak, geliştirdikleri analiz yöntemlerinden elde ettikleri sonuçlarla deneysel sonuçları karşılaştırmışlar ve özellikle yüklerin servis yüklerini aşmadığı durumlarda uyumlu sonuçlar elde etmişlerdir.

## Formülasyonda Kullanılan Modeller

### Efektif Eğilme ve Kayma Rijitliği için Kullanılan Modeller

Bu çalışmada çatlama sonrası betonarmelerdeki eğilme rijitliği değişimi ACI ve CEB modelleri kullanılarak analize dahil edilmiştir. ACI modelinde efektif atalet momentleri

$$I_{\text{eff}} = \left( \frac{M_{\text{cr}}}{M} \right)^m I_g + \left[ 1 - \left( \frac{M_{\text{cr}}}{M} \right)^m \right] I_{\text{cr}}, \quad M \geq M_{\text{cr}} \quad (1a)$$

$$I_{\text{eff}}=I_g, \quad M < M_{\text{cr}} \quad (1b)$$

formülü ile, CEB modelinde ise,

$$I_{\text{eff}} = \left[ \beta_1 \beta_2 \left( \frac{M_{\text{cr}}}{M} \right)^2 \frac{1}{I_g} + \left( 1 - \beta_1 \beta_2 \left( \frac{M_{\text{cr}}}{M} \right)^2 \right) \frac{1}{I_{\text{cr}}} \right]^{-1}, \quad M \geq M_{\text{cr}} \quad (2a)$$

$$I_{\text{eff}} = I_g, \quad M < M_{\text{cr}} \quad (2b)$$

formülü ile hesaplanmaktadır. Bu denklemlerde geçen  $M$ , ilgili kesitteki eğilme momentini,  $M_{\text{cr}}$  ise çatlama anındaki eğilme momentini ifade etmektedir.  $I_g$  ve  $I_{\text{cr}}$  sırası ile kesitin çatlama öncesi ve sonraki atalet momenti değerleridir.

Efektif kayma modüllerinin hesabında kullanılan azaltılmış kayma rijitliği  $\bar{G}_c$  için bazı araştırmacılar tarafından verilen ve bu çalışmada da kullanılan modeller aşağıdaki denklemlerde görülmektedir.

Al-Mahaidi Modeli:

$$\bar{G}_c = \frac{0.4 G_c}{\varepsilon_1 / \varepsilon_{\text{cr}}}, \quad \varepsilon_1 \geq \varepsilon_{\text{cr}} \quad (3a)$$

$$\bar{G}_c = G_c, \quad \varepsilon_1 < \varepsilon_{\text{cr}} \quad (3b)$$

Yüzüğüllü ve Scnoberich Modeli:

$$\bar{G}_c = 0.25 G_c, \quad \varepsilon_1 \geq \varepsilon_{\text{cr}} \quad (4)$$

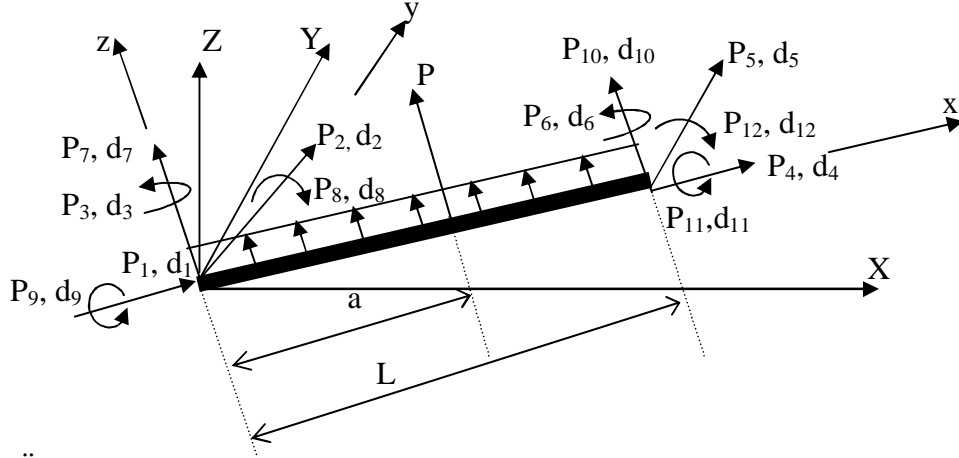
Cedolin ve Dei Poli Modeli:

$$\bar{G}_c = 0.24 G_c (1 - 250 \varepsilon_1), \quad \varepsilon_1 \geq \varepsilon_{\text{cr}} \quad (5)$$

3, 4 ve 5 ifadelerindeki  $\varepsilon_{\text{cr}}$  çatlama anındaki çekme şekil değiştirmesi,  $\varepsilon_1$  ilgili kesitteki çekme şekil değiştirmesi ve  $G_c$  betonun çatlama öncesi haldeki elastik kayma modülü değerleridir.

## Temel Denklemler

Yapıyı oluşturan çerçevelerin çubuk elemanlardan oluştuğu kabul edilmektedir. (x,y,z) çubuk yerel eksen takımını göstermekte olup, çubukların açıklıkları boyunca yerel z eksenini doğrultusunda düzgün yayılı yük ve ara tekil yük etkisi altında olabilecekleri göz önünde bulundurulmuştur (Şekil 1).



Şekil 1. Üfiform yayılı ve ara tekil yükler etkisi altındaki bir elemanda oluşabilecek uç deplasmanları ve karşılık gelen kuvvetleri

Formülasyonların oluşturulmasında ilk etapta birim yüklemeler uygulanarak esneklik katsayıları daha sonra da uygunluk şartları ve denge denklemlerinden yararlanılarak bazı bölgelerinde çatlama oluşabilecek elemanların yük vektörleri ve rijitlik matrisi değerleri elde edilmektedir. Genel olarak bir uzay elemanı için esneklik katsayıları konsol bir kirişe ilgili yönlerde birim kuvvetler uygulanarak elde edilmektedir (Şekil 2).



Şekil 2. Konsol bir kirişe uygulanan birim kuvvet yönleri

Uygunluk denklemlerinden yararlanılarak esneklik katsayılarını içeren değerler (6) ifadesindeki gibi matris formunda elde edilmiştir.

$$\begin{bmatrix} f_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f_{22} & f_{23} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f_{32} & f_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & f_{77} & f_{78} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & f_{87} & f_{88} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & f_{99} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_7 \\ P_8 \\ P_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_7 \\ d_8 \\ d_9 \end{bmatrix} \quad (6)$$

Bu denklemdeki  $f_{ij}$ ,  $j$  doğrultusunda bir birimlik kuvvet uygulanması sonucu  $i$  doğrultusunda oluşan deplasman olup, 7 ifadesindeki virtüel iş prensibinden yararlanılarak bulunmaktadır.

$$f_{ij} = \int_0^L \left( \frac{M_{zi} M_{zj}}{E_c I_{effz}} + \frac{M_{yi} M_{yj}}{E_c I_y} + \frac{V_{yi} V_{yj}}{G_c A} s + \frac{V_{zi} V_{zj}}{G_c A} s + \frac{M_{bi} M_{bj}}{G_c I_o} + \frac{N_i N_j}{E_c A} \right) dx \quad (7)$$

(7) ifadesindeki  $M_{zi}, M_{zj}, M_{yi}, M_{yj}, M_{bi}, M_{bj}, V_{zi}, V_{zj}, V_{yi}, V_{yj}, N_i$  ve  $N_j$  değerleri,  $i$  ve  $j$  doğrultusunda bir birimlik kuvvet uygulanması sonucu oluşan eğilme momenti, burulma momenti, kesme kuvveti ve normal kuvvet değerleridir. Yine aynı denklemdeki  $A, E_c, s, \bar{G}_c, I_0$  ve  $G_c$  ise, kesit alanı, elastisite modülü, şekil katsayısı, efektif kayma modülü, burulma momenti ve elastik kayma modülü değerleridir.

(12x12) boyutunda üç boyutlu eleman rijitlik matrisi, (6) denklemindeki esneklik katsayılarını içeren matrisin tersi alınarak ve denge denklemleri kullanılarak elde edilmektedir.

Eleman üzerindeki üniform yayılı yük ve ara tekil yüklerden dolayı oluşan uç kuvvetleri uygunluk şartları ve denge denklemleri kullanılarak aşağıdaki gibi bulunmaktadır.

$$P_{70} = -(f_{77} f_{70} - f_{78} f_{80}) / (f_{77} f_{88} - f_{78} f_{87}) \quad (8a)$$

$$P_{80} = -(f_{77} f_{80} - f_{78} f_{70}) / (f_{77} f_{88} - f_{78} f_{87}) \quad (8b)$$

$$P_{100} = -(q L + P + P_{70}) \quad (8c)$$

$$P_{120} = -(q L^2/2 + P(L-a) + P_{70} L + P_{80}) \quad (8d)$$

$$P_{10} = P_{20} = P_{30} = P_{40} = P_{50} = P_{60} = P_{90} = P_{110} = 0 \quad (8e)$$

(8) denklemlerindeki  $f_{i0}$  değerleri dış yüklerden dolayı  $i$  doğrultusunda oluşan deplasmanlar olup, (9) ifadesinden yararlanılarak hesaplanmaktadır.

$$f_{i0} = \int_0^L \left( \frac{M_{zi} M_0}{E_c I_{effz}} + \frac{V_{yi} V_0}{G_c A} s \right) dx \quad (9)$$

Bu deklemdaki  $M_0$  ve  $V_0$   $z$  doğrultusundaki dış kuvvetlerden dolayı oluşan eğilme momenti ve kesme kuvveti değerleridir.

Elemanların kendi eksenlerine göre elde edilmiş olan rijitlik denklemleri transformasyon matrisi aracılığı ile global koordinat sistemine çevrildikten sonra aşağıdaki formda oluşmaktadır.

$$\begin{bmatrix} P'_A \\ P'_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k'_{AA} & k'_{AB} \\ k'_{BA} & k'_{BB} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d'_A \\ d'_B \end{bmatrix} \quad (10)$$

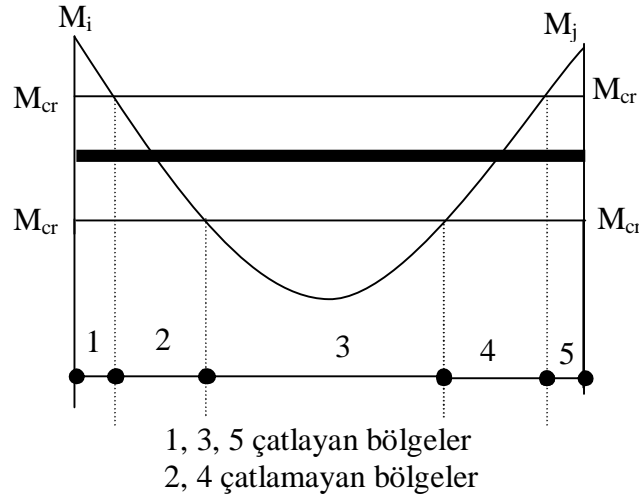
Buradaki  $k'_{AA}$  (6x6),  $k'_{AB}$  (6x6),  $k'_{BA}$  (6x6),  $k'_{BB}$  (6x6) ve  $d'_A$  (6x1) ve  $d'_B$  (6x1) değerleri şekilde gösterilen ilgili yöndeki global koordinat sistemindeki değerleridir.



Şekil 3. Bir kiriş elemanında global eksen takımında ilgili yönlerde oluşabilecek deplasmanlar

Yapıların üç boyutlu analizi için geliştirilen rijit diyafram modelinde her elemanın deplasmanları master noktası deplasmanları cinsinden yazılarak eleman rijitlik denklemi yeniden oluşturulmaktadır. Daha sonra her elemandan gelen etki ve katkılar göz önünde bulundurularak sistem rijitlik matrisi ve yük vektörü değerleri elde edilmektedir. Elde edilen sistem denklemi çözülerek sistem deplasmanları ile her elemanın uç kuvvetleri ve uç deplasmanları elde edilmektedir.

Esneklik katsayılarının elde edilmesinde kullanılan integral değerleri kiriş elemanının çatlaman ve çatlamayan bölgelere sahip olabileceğinden dolayı her bölge için ayrı ayrı hesaplanmaktadır. Çatlamaman meydana geldiği bölgedeki integral çözümleri nümerik integrasyondan faydalanılarak yapıp, bu bölgelerdeki atalet momenti ve kayma modülü değerlerinin eğilme momentine bağlı olarak değişimi yapıdaki iç kuvvetlerin yeniden dağılımına neden olmasından dolayı analizde iteratif bir yöntem uygulanarak çözüme gidilmiştir. Genel olarak bir kiriş elemanında eğilme momenti etkisi altında oluşabilecek çatlaman ve çatlamayan bölgeler şekil 4 de gösterilmiştir.



Şekil 4. Herhangi bir kiriş elemanında genel olarak eğilme momentinden dolayı oluşabilecek çatlaman ve çatlamayan bölgeler

### Bilgisayar Programı

Bu çalışmada geliştirilen bilgisayar programı FORTRAN 77 dilinde yazılmıştır. Programda, her iterasyon sonucu hesaplanan uç kuvvetleri bir önceki iterasyondaki değerler yardımıyla bulunup,

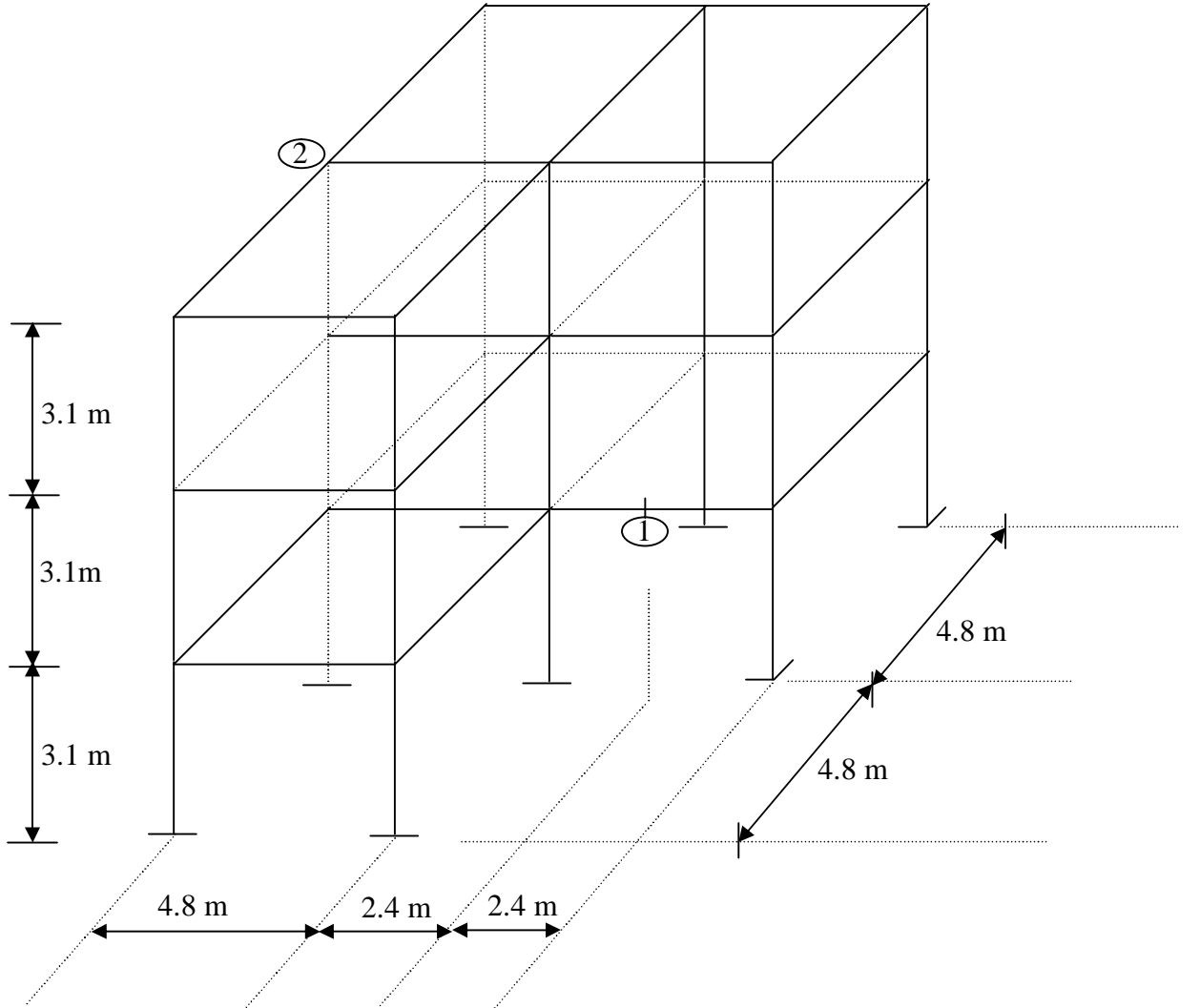
$$\left| \frac{P_i^n - P_i^{n-1}}{P_i^n} \right| \leq \varepsilon \quad (11)$$

şeklinde bir yakınsaklık kriteri kullanılmıştır. Buradaki  $\varepsilon$  yakınsaklık kriteri,  $n$  iterasyon numarası,  $P_i^n$  ve  $P_i^{n-1}$   $n$ . ve  $(n-1)$ . iterasyonda hesaplanan eleman uç kuvveti değerleridir.

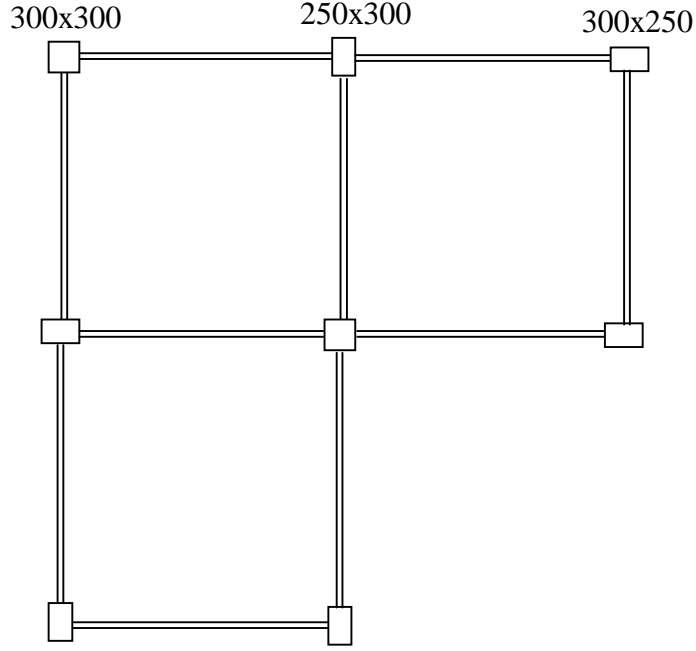
Bilgisayar programına veri girişi herhangi bir editör yazılımı ile hazırlanabilen ve "genel bilgiler", "eleman özellikleri", "mesnet şartları", "koordinatlar" ve "yükler" olmak üzere beş data bloğundan oluşan data dosyası ile yapılmaktadır. Data dosyası hazırlanırken çeşitli türetmelerle veri girişinde bazı kısaltmalar yapılabilmektedir.

## Üç Boyutlu Betonarme Çerçeve Üzerinde Bir Parametrik Çalışma

Bu bölümde yatay ve düşey yükler etkisi altındaki üç katlı betonarme çerçeve örneği geliştirilen bilgisayar programı ile çözülmüştür (Şekil 5 ve Şekil 6). Analizde efektif atalet momentlerinin hesabında ACI ( $m=4$ ), efektif kayma modüllerinin hesabında ise Al-Mahaidi'nin modeli kullanılmış olup, bu örnekle ilgili gerekli bilgiler Tablo-1 de görülmektedir. Her kattaki master noktalarına etkiyen yatay yükler sabit kalırken, düşey yükler 10 kN/m den 50 kN/m ye kadar artırılarak 1 numaralı düğümde oluşan düşey ve 2 numaralı düğümde oluşan yatay deplasmanlar çatlamamanın gözönünde bulundurulması ve bulundurulmaması halleri için ayrı ayrı hesaplanmış olup, karşılaştırmalar şekil 7 ve şekil 8 de verilmektedir.



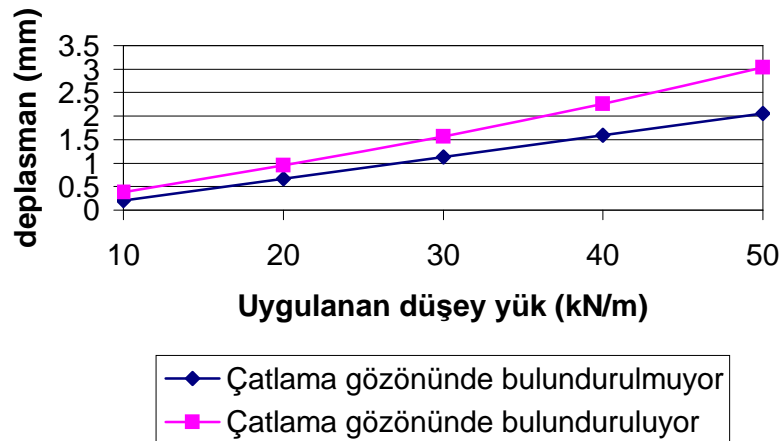
Şekil 5. Üç katlı betonarme çerçeve örneği



Şekil 6. Üçüncü kat kolon yerleşim planı

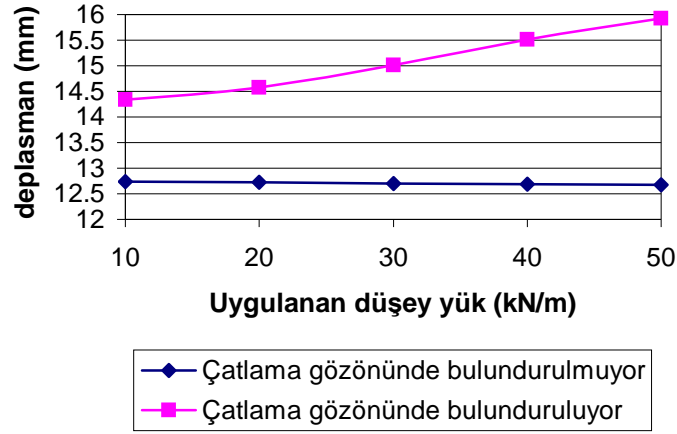
Tablo 1. Betonarme çerçeve örneği ile ilgili bilgiler

	1. Kat	2. Kat	3. Kat
Kolon Boyutları	350x350 mm	300x300 mm	250x300 ve 300x250 mm
Kiriş Boyutları	250x500 mm	250x500 mm	250x500 mm
Düşey Yükler (kN/m)	q	0.7 q	0.7q
Master noktalarına etkiyen yatay yükler(kN)	51.8	96.2	98.6



Şekil 7. 1 numaralı düğümdeki düşey deplasmanların uygulanan yüklere göre değişimi





Şekil 8. 2 numaralı düğümdeki yatay deplasmanların uygulanan yüklere göre değişimi

## Sonuçlar

Bu çalışmada geliştirilen bilgisayar programı aracılığı ile bir çok betonarme çerçeve örnek çözümlerinin irdelenmesi sonucu, yapıya etkiyen yük seviyesinin artması ile birlikte elde edilen deplasmanların lineer analize göre büyük değişimler gösterdiği ve elemanlar arasında kuvvet aktarımları olduğu görülmüştür. Çatlama göz önünde bulundurulularak hesaplanan bu deplasman ve uç kuvveti değerlerinin hasarlı yapıların onarılması ve güçlendirilmesi çalışmalarında faydalı olabileceği düşünülmektedir.

## Referanslar

Al-Mahaidi, R. S. H., 1978, "Nonlinear Finite Element Analysis of Reinforced Concrete Deep Members", *Department of Struc. Engrg.*, Cornell Unuversity, Report No. 79-1

Chun-Man Chan, Neil C. Mickleborough, Feng Ning, 2000, " Analysis of Cracking Effects On A Tall Reinforced Concrete Buildings, *Journal Of Structural Engineering*, Vol. 126, No. 9, pp 995-1003

Codelin, L. ve dei Poli S., 1977, "Finite Element Studies of Shear Critical Reinforced Concrete Beams", *J. Engineering Mech. Div.*, ASCE, (EM3).

Tanrikulu, A. K., Dünder, C. ve Çağatay, İ. H., 2000, "A Computer Program for the Analysis of Reinforced Concrete Frames with Cracked Beam Elements", *Structural Engineering and Mechanics*, Vol. 10, No. 5, pp 463-478.

*Türk Standartları, Betonarme Yapıların Hesap ve Yapım Kuralları (TS 500)*, 2000, Türk Standartları Enstitüsü

Yüzügüllü, O. ve Schnobrich, W. C., 1973, "A Numerical Procedure for the Determination of the Behaviour of a Shear Wall Frame System", *ACI J.*, 70(7), 474-479